Supponiamo di partire da una matrice 5×7

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

e di ridurla per righe

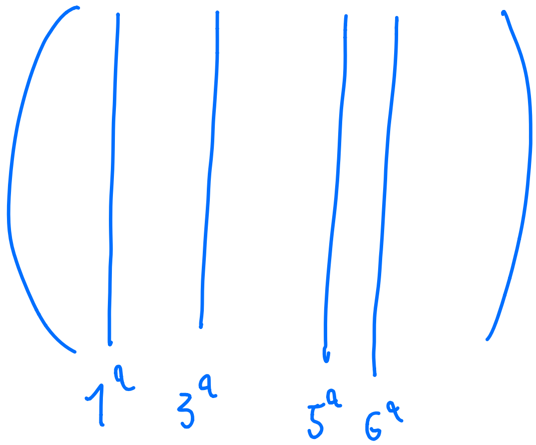
$$\begin{pmatrix} 1 & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 1 & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pivot sono nella 1^a, 3^a, 5^a e 6^a colonna.

Affermo che la 1^a, 3^a, 5^a e 6^a colonna di

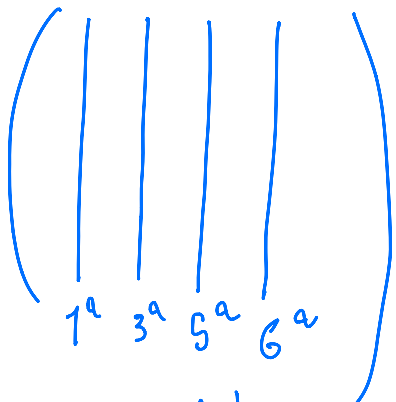
A SONO LIN INDIP.

MATRICE INIZIALE

$A =$ 

5×7

Formo la matrice A' fatta solo dalla $1^a, 3^a, 5^a$ e 6^a colonna di A.

$A' =$ 

5×4

se faccio su A' le stesse mosse che avevo fatto su A ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ 0 & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

4 PIVOT

Il sistema

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è equivalente al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sim & \sim & \sim \\ & 1 & \sim & \sim \\ & & 1 & \sim \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha solo la soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(è omogeneo, ha 4 variabili e 4 PIVOT).

Questo equivale a dire che le 4 colonne di A' sono lin INDIP.

Penso adesso alla matrice A
come matrice di una applicazione
lineare $L : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$.

Ker L ha dim 3 (7 variabili e
4 PIVOT).

Per il teorema della dimensione

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{R}^7$$

$$3 + \dim \operatorname{Im} L = 7$$

so che $\dim \operatorname{Im} L = 4$.

Allora le 4 colonne di A linearmente
indipendenti che avevo trovato
(la $1^a, 3^a, 5^a, 6^a$) SONO ANCHE

UNA BASE di Imm L.

<u>Teorema</u> Data una matrice A $\underset{\text{righe}}{m} \times \underset{\text{colon}}{n}$ il numero NP_c dei pivot che si trovano riducendola a scalini per colonna è uguale al numero NP_r dei pivot che si trovano riducendo la matrice a scalini per righe.

Tale numero si chiama il RANGO della matrice A.

<u>Dim</u> Pensiamo ad A come la matrice di una certa applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Per calcolare $\ker L$ riduco la matrice A per righe e trovo NP_r PIVOT.

Allora $\dim \ker L = n - NP_r$

numero di variabili

numero dei PIVOT

Per calcolare una base di $\operatorname{Im} L$ posso fare su A le mosse di colonna e trovo NP_c pivot.

dunque $\dim \operatorname{Im} L = NP_c$

Per il teorema della dimensione.

$$\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{R}^n$$

$$n - NP_r + NP_c = n$$

da cui

$$NP_C = NP_R.$$

Esercizio 1 $\quad T: \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

l' applicazione lineare definita così:

$$T(P(x)) = p'(x) + p''(x) + p(2)$$

a) Scrivere la matrice

$$[T]^{x^3, x^2, x^1, 1}_{x^3, x^2, x^1, 1}$$

$$\begin{array}{cccc} Tx^3 & Tx^2 & Tx & T1 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Trovare una base di Ker T

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

ossia una base è $\quad -x+3$

c) Trovare una base di $\mathrm{Im}\, T$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\6\\8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$$

come polinomi $\longrightarrow$ $3x^2+6x+8 \quad 2x+6 \quad 3$

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ S x_3 = K \end{cases}$$

Dire per ognuna delle seguenti coppie (S, K) il numero di soluzioni del sistema (scegliere fra NESSUNA, ESATT. 1, ESATT. 3, INFINITE)

$(S, K) = (0, 5)$ NESSUNA

$(S, K) = (5, 0)$ 1

$(S, K) = (0, 0)$ INFINITE

$(s, k) = (5, 5)$ - - 1 - . . . .

$(s, k) = (7, 5)$ - 1 - - . .

Esercizio Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$[L]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia β la base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sia γ la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trovare

$$[L]_{\gamma}^{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right)$$

RISPOSTA

SVOLGIMENTO

Nella prima colonna metto $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ -1}}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nella seconda colonna metto $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ -1}}{d}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.9.15 libro

Si determini, se possibile, una applic. lineare $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tc

$$\operatorname{Ker} F = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad e$$

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

NON È POSSIBILE perchè CONTRADDIREBBE il teorema della dimensione.

Esercizio 5.9.16

Si determini, se possibile, una applic. lineare $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tc

$$\operatorname{Ker} F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad \operatorname{Im} F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Le colonne devono essere dei multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Inoltre
$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline -\alpha & -\beta \\ \hline 2\alpha & 2\beta \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo accade se e solo se $\beta = 0$

Dunque la risposta è SI

$$[F]^{st\,\mathbb{R}^2}_{st\,\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.4.16 b)

Si determini un insieme di generatori dello spazio vettoriale.

$$T = \{ h x^3 - k x^2 + 4 h x + k \mid h, k \in \mathbb{R} \}$$

(T è sottospazio di $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$).

SVOLGIMENTO

Scelgo la base $x^3, x^2, x, 1$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

Allora T si scrive così

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -k \\ 4h \\ k \end{pmatrix} \text{ t.c. } h,k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ t.c. } h,k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Dunque x^3+4x e $-x^2+1$ sono generatori di T

Esercizio 5.9.21

Data $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\-4\\k\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\k\\3\end{pmatrix}$$

si determini per quali valori di k F è INIETTIVA e per quali valori di k F è SURGETTIVA

SVOLGIMENTO

La matrice è:

$$[F]^{st\,\mathbb{R}^2}_{st\,\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}k & -3\\-4 & k\\k & 3\end{pmatrix}.$$

Per il teorema della dimensione

noto che dim Im F al massimo è 2
dunque F non potrà essere surgettiva
dato che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.

Per controllare l'iniettività, devo
calcolare Ker F

Faccio mosse di riga

$$\begin{pmatrix} -4 & K \\ K & -3 \\ K & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{K}{4} \\ K & -3 \\ K & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{K}{4} \\ 0 & -3+\frac{K^2}{4} \\ 0 & 3+\frac{K^2}{4} \end{pmatrix}$$

nota che $3+\frac{k^2}{4}$ è sempre >0

Quindi ho sempre 2 PIVOT

Allora il sistema ha solo la soluzione

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (due variabili, due PIVOT, ossia nessuna variabile libera).

Dunque F è sempre INIETTIVA. $\forall k$.

Esercizio Sia $Mat_{5\times 5}(\mathbb{R})$

lo spazio vettoriale delle matrici 5×5

a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Sia W il sottospazio dato dalle

matrici (a_{ij})

che verificano
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ & & & \end{pmatrix}$$
le due condizioni

$$\begin{cases} a_{12}+a_{23}+a_{34}+a_{35}=0 \\ a_{14}+a_{24}+a_{34}=0 \end{cases}$$

SCRIVERE LA dim W.

RISPOSTA: 23

Trovare W equivale a risolvere un sistema omogeneo con 25 variabili a_{ij} e due equazioni.
Si vede subito che ci sono 2 PIVOT e dunque 23 variabili libere.